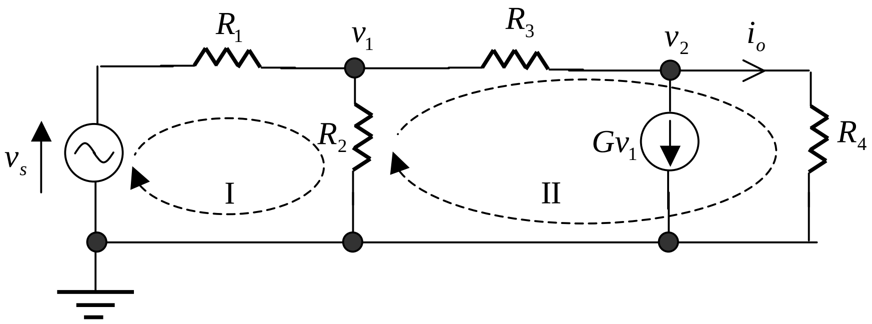
<u>טכניון – מכון טכנולוגי לישראל</u>
<u>פקולטה להנדסת חשמל</u>

<u>מעגלים אלקטרונים ליניארים</u>

<u>תרגיל מס׳ 1 - פתרון מעגלים חשמליים</u>

<u>שאלה1:</u>

<u>נתון:</u>



$R_1 = 1K\Omega$
$R_2 = 2K\Omega$
$R_3 = 3K\Omega$
$R_4 = 4K\Omega$
$G = 1mmho$

1. יש לרשום את משוואות הצמתים (KCL) עבור צמתים v_1 ו- v_2. יש להביא את הרישום לצורת מטריצה ובטא את v_2 כפונקציה של רכיבי המעגל.
2. יש לרשום את משוואות החוגים (KVL) בחוגים I ו- II . יש להביא את הרישום לצורת מטריצה ובטא את i_o כפונקציה של רכיבי המעגל.

<u>פתרון:</u>

זרמים יוצאים מצומת מוגדרים חיוביים.

כמו כן נגדיר ״מוליכות״ כ:

$$G_i \triangleq \frac{1}{R_i}$$

1. <u>KCL</u>

$$v_1 : (v_1 - v_s)G_1 + v_1 G_2 + (v_1 - v_2)G_3 = 0$$
$$v_2 : -(v_1 - v_2)G_3 + v_2 G_4 + v_1 G = 0$$

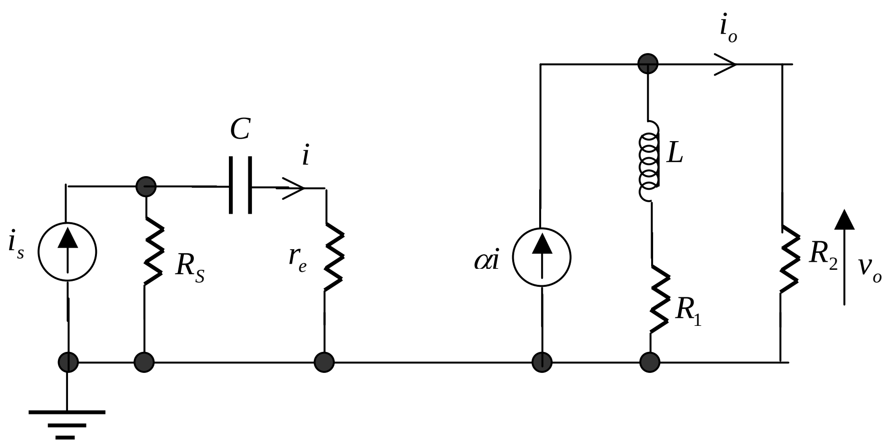
2. <u>KVL</u>

$$I: v_s = i_1R_1 + i_1R_2 - i_2R_2$$
$$II: 0 = i_2R_2 + i_2R_3 - i_1R_2 + i_oR_4$$

$$i_o = i_2 - Gv_1$$
$$v_1 = (i_1 - i_2)R_2$$
$$\Rightarrow i_o = i_2 - GR_2(i_1 - i_2) = i_2(1 + GR_2) - i_1R_2G$$

<u>שאלה2:</u>

<u>נתון:</u>



$R_S = 5K\Omega$
$R_1 = 1K\Omega$
$R_2 = 2K\Omega$
$r_e = 25\Omega$
$L = 1Hy$
$C = 1\mu F$
$\alpha = 0.99$

1. מצא את פונקצית התמסורת של המעגל: $A(s) = \frac{v_o(s)}{i_s(s)}$.
2. בהנחה שאות הכניסה הוא אות סינוס בתדר בודד, חשב את ערך פונקציית התמסורת $A(j\omega)$ עבור: $\omega = 0, \infty, 10^3 \frac{rad}{\sec}$.

<u>פתרון:</u>

$$i = i_s \frac{R_S}{R_S + \frac{1}{SC} + r_e} = i_s \frac{SCR_S}{1 + SC(R_S + r_e)}$$

$$v_o = \alpha i(R_2 \parallel (R_1 + SL)) = \alpha i \frac{R_2(R_1 + SL)}{R_1 + R_2 + SL}$$

$$A(s) = \frac{v_o(s)}{i_s(s)} = \alpha \frac{SCR_S}{1 + SC(R_S + r_e)} \frac{R_2(R_1 + SL)}{R_1 + R_2 + SL}$$

$$A(s)=\frac{\alpha R_2 R_S}{R_S+r_e}\frac{S(S+\frac{R_1}{L})}{(S+\frac{1}{C(R_S+r_e)})(S+\frac{R_1+R_2}{L})}$$

אחרי הצבת ערכים נקבל:

$$A(s)=1970\frac{S(S+1000)}{(S+199)(S+3000)}=3.3\frac{S(1+\frac{S}{1000})}{(1+\frac{S}{199})(1+\frac{S}{3000})}$$

נציב $S=j\omega$ ונקבל:

$$A(j\omega)=3.3\frac{S(1+\frac{j\omega}{1000})}{(1+\frac{j\omega}{199})(1+\frac{j\omega}{3000})}$$

כעת עבור התדירויות הזוויתיות השונות נקבל:

$A(0)=0\,\underline{|0^0}$

$A(j1000)=864\,\underline{|37.8^0}$

$A(\infty)=1970\,\underline{|0^0}$

דף עזר לתרגיל כיתה מס' 1 - פונקצית תמסורת

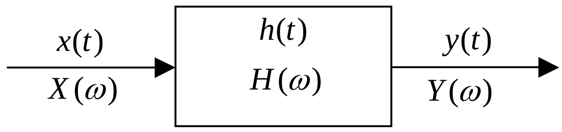
ננסה להבין מה משמעות של אמפליטודה וזווית של פונקצית תמסורת כל שהיא.
פונקצית תמסורת היא התמרת פורייה של התגובה להלם של מערכת ליניארית וקבועה בזמן, כאשר התמרת פורייה של הפונקציה הזמנית $x(t)$ מוגדרת כך:

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt$$

כאשר הפרמטר ω הנו תדירות זוויתית ביחידות של rad/sec.
כמו כן התמרת פורייה ההפוכה מוגדרת באופן הבא:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

נתונה מערכת ליניארית קבועה בזמן עם פונקצית תמסורת $H(\omega)$.



נבדוק מהו אות המוצא במערכת כאשר בכניסתה מוכנס אות סינוסואידלי.
אות הכניסה הנו באמפליטודה A, בתדירות ω_o ועם פאזה התחלתית ϕ_o:

$$x(t) = A\cos(\omega_o t + \phi_o)$$

התמרת פורייה של אות הכניסה היא:

$$X(\omega) = \pi[\delta(\omega+\omega_o) + \delta(\omega-\omega_o)]e^{j\omega\frac{\phi_o}{\omega_o}}$$

התמרת פורייה של האות במוצא ניתן לכתיבה באופן הבא:

$$Y(\omega) = X(\omega)H(\omega)$$

נתאר את פונקצית התמסורת של המערכת ע"י גודל האמפליטודה והזווית שלה:

$$H(\omega)=|H(\omega)|e^{\angle H(\omega)}$$

כעת נוכל לרשום:

$$\begin{aligned}
Y(\omega) &= A\pi[\delta(\omega+\omega_o)+\delta(\omega-\omega_o)]e^{j\omega\frac{\phi_o}{\omega_o}}|H(\omega)|e^{\angle H(\omega)} = \\
&A\pi\delta(\omega+\omega_o)e^{-j\omega_o\frac{\phi_o}{\omega_o}}|H(-\omega_o)|e^{\angle H(-\omega_o)}+A\pi\delta(\omega-\omega_o)e^{j\omega_o\frac{\phi_o}{\omega_o}}|H(\omega_o)|e^{\angle H(\omega_o)} = \\
&A|H(-\omega_o)|\pi\delta(\omega+\omega_o)e^{-j\phi_o+\angle H(-\omega_o)}+A|H(\omega_o)|\pi\delta(\omega-\omega_o)e^{j\phi_o+\angle H(\omega_o)}
\end{aligned}$$

בהנחה כי תגובת ההלם של המערכת היא ממשית אזי מתקיימים הקשרים הבאים:

$$|H(\omega)|=|H(-\omega)|$$
$$\angle H(-\omega)=-\angle H(\omega)$$

לכן:

$$Y(\omega)=A|H(\omega_o)|\pi\delta(\omega+\omega_o)e^{-j\phi_o-\angle H(\omega_o)}+A|H(\omega_o)|\pi\delta(\omega-\omega_o)e^{j\phi_o+\angle H(\omega_o)}$$

נבצע התמרת פורייה הפוכה לאות הנ"ל:

$$\begin{aligned}
y(t) &= \frac{1}{2}A|H(\omega_o)|e^{-j\phi_o-\angle H(\omega_o)}e^{-j\omega_o t}+\frac{1}{2}A|H(\omega_o)|e^{j\phi_o+\angle H(\omega_o)}e^{j\omega_o t} = \\
&A|H(\omega_o)|\cos[\omega_o t+\phi_o+\angle H(\omega_o)]
\end{aligned}$$

$$y(t)=A|H(\omega_o)|\cos[\omega_o t+\phi_o+\angle H(\omega_o)]$$

סיכום:

1. רואים כי אות המוצא הוא **אות סינוסואידלי בעל תדירות זוויתית** ω_o אשר זהה לזו של אות הכניסה.
זאת תכונה בסיסית מאד חשובה של מערכת ליניארית. מערכת שבה אות המוצא הוא בעל תדירות שונה מאות הכניסה, איננה מערכת ליניארית!

2. אמפליטודת אות המוצא גדולה פי $|H(\omega_o)|$ מזו של הכניסה.

לכן ערך האמפליטודה של פונקצית התמסורת בתדירות ω_o נותנת אינדיקציה לפי כמה גדולה אמפליטודת אות המוצא יחסית לכניסה, כאשר אות הכניסה הוא בתדירות של ω_o.

3. פאזת אות המוצא גדולה ב- $H(\omega_o)$ מזו של הכניסה.
לכן ערך הפאזה של פונקצית התמסורת בתדירות ω_o נותנת אינדיקציה לכמה גדולה פאזת אות המוצא יחסית לכניסה, כאשר אות הכניסה הוא בתדירות של ω_o.

4. דיברנו על כך שאות הוא סינוסואידלי בתדירות מסוימת. חשבו כיצד ניתן לנתח את המערכת עבור אות כללי כל שהוא.

דייויד גדעוני